

Tích phân đường

Lê Đức Hưng

Bộ Môn Giải Tích, Khoa Toán-Tin Học, Trường ĐH KHTN, ĐHQG-HCM

Ngày 01 tháng 12 năm 2025

Trong chương này, ta sẽ trả lời những câu hỏi về độ đo của tập con “ k -chiều” trong không gian n -chiều với $k < n$ và tích phân trên đó.

Một cách cụ thể, ta sẽ quan tâm đến: chiều dài của đường đi, tích phân đường ($k = 1$); và diện tích của bề mặt, tích phân mặt ($k = 2$).

Mỗi phần tử của tập hợp $\mathbb{R}^n$ có vai trò tùy theo khía cạnh mà ta quan tâm: là một **vecto** nếu ta quan tâm tới phép toán vectơ, hay là một **điểm** nếu ta quan tâm hơn tới khoảng cách.

Chính vì vậy một phần tử của $\mathbb{R}^n$ khi thì được gọi là một vectơ, khi thì được gọi là một điểm. Cũng vì lí do này mà ta không nhất thiết phải dùng kí hiệu khác nhau để phân biệt điểm hay vectơ.

Khái niệm về “đường”

Một **đường đi** (path) là một ánh xạ từ một khoảng đóng $[a, b]$ vào $\mathbb{R}^n$. Ta có thể xem đây là vị trí ứng với mỗi thời điểm.

Tập hợp các điểm mà đường đi đã đi qua được gọi là **vết của đường đi** (trace). Với đường đi $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ thì vết của r là tập ảnh

$$r([a, b]) = \{r(t) \mid t \in [a, b]\}.$$

Ví dụ: Đường đi $r : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ được cho bởi

$$r(t) = (t, t^2).$$

Vết của đường đi $r([-1, 2]) = \{r(t) \mid t \in [-1, 2]\}$ là một parabola $y = x^2$ với $-1 \leq x \leq 2$.

Các loại đường đi

Đường đi $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ được gọi là:

- ▶ **đóng** (closed) hay **kín** nếu $r(a) = r(b)$, tức là điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.
- ▶ **đơn** (đơn giản - simple) nếu nó không đi qua điểm nào hai lần, tức là đường đi không có điểm tự cắt. Chính xác hơn,
 - ▶ nếu r không phải là đường đóng thì r được gọi là đường đơn nếu r là đơn ánh trên $[a, b]$;
 - ▶ nếu r là đường đóng thì r được gọi là đường đơn nếu r là đơn ánh trên $[a, b)$.
- ▶ **liên tục** nếu r là hàm liên tục trên $[a, b]$.



Hình: Đường đơn, không kín



Hình: Đường đơn, kín



Hình: Đường không đơn, kín



Hình: Đường không đơn, không kín

Đường đi $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ được gọi là **trơn** (smooth) nếu r là hàm trơn trên $[a, b]$, nghĩa là nếu r mở rộng được thành hàm trơn trên một khoảng $(c, d) \supset [a, b]$, tức là r phải có đạo hàm phải tại a và đạo hàm trái tại b .

Ví dụ: Nếu r là đường đi trơn và $r(t)$ có ý nghĩa vật lý là vị trí của vật tại thời điểm t , thì đạo hàm $r'(t)$ là **vận tốc** (velocity) tại thời điểm t .

Độ lớn của vận tốc $\|r'(t)\|$ là **tốc độ** (speed) tại thời điểm t .

Nhắc lại: giới hạn, đạo hàm, và tích phân của hàm vectơ $r(t)$ cũng là giới hạn, đạo hàm, và tích phân của từng thành phần của $r(t)$.

Ví dụ: Giả sử $r(t) = (f(t), g(t), h(t)) \in \mathbb{R}^3$. Khi đó,

$$\lim_{t \rightarrow a} r(t) = \left(\lim_{t \rightarrow a} f(t), \lim_{t \rightarrow a} g(t), \lim_{t \rightarrow a} h(t) \right),$$

$$r'(t) = (f'(t), g'(t), h'(t)),$$

$$\int r(t) \, dt = \left(\int f(t) \, dt, \int g(t) \, dt, \int h(t) \, dt \right),$$

$$\|r'(t)\| = \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2}.$$

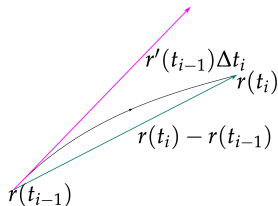
và ta có thể tổng quát lên cho $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Chiều dài của đường đi

Nếu ta xem $r(t)$ là hàm vị trí của một vật và *giả sử rằng vật di chuyển với vận tốc đều*, tức là $r'(t) = v$, một hằng số, thì vết của r từ $t = a$ đến $t = b$ sẽ là $r([a, b]) = [r(a), r(b)]$ và chiều dài đường đi là:

$$r(b) - r(a) = v(b - a).$$

Như vậy, *khi vận tốc không đều* và chuyển động có tính liên tục, thì trên những khoảng thời gian nhỏ vận tốc thay đổi nhỏ, do đó trên khoảng thời gian nhỏ đó ta có thể xấp xỉ chuyển động bằng một chuyển động đều.



Cho đường đi $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Xét một phép chia

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$$

của $[a, b]$. Trên mỗi khoảng con $[t_{i-1}, t_i]$, $1 \leq i \leq m$, ta có xấp xỉ tuyến tính đường đi

$$r(t) - r(t_{i-1}) \approx r'(t_{i-1})(t - t_{i-1}),$$

nghĩa là ta xấp xỉ chuyển động bằng một chuyển động đều với vận tốc không đổi $r'(t_{i-1})$.

Quãng đường đi được trong khoảng thời gian $[t_{i-1}, t_i]$ được xấp xỉ bởi vectơ $r'(t_{i-1})\Delta t_i$ với chiều dài là $\|r'(t_{i-1})\Delta t_i\|$. Như vậy, chiều dài của tổng đường đi trên từng đoạn $[t_{i-1}, t_i]$ được xấp xỉ bởi

$$\sum_{i=1}^m \|r'(t_{i-1})\Delta t_i\|,$$

chính là tổng Riemann của hàm $\|r'(t)\|$ trên khoảng $[a, b]$.

Định nghĩa chiều dài đường đi

Chiều dài đường đi $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ được định nghĩa là

$$\int_a^b \|r'(t)\| \, dt.$$

Nếu $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ với $r(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, thì chiều dài đường đi là:

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt.$$

Tương tự, nếu $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ với $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ thì chiều dài đường đi là:

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \, dt.$$

Ví dụ

Tính chiều dài đường đi $r(t)$ trong $\mathbb{R}^3$ được tham số hóa bởi

$$r(t) = \left(2\sqrt{2}t, e^{-2t}, e^{2t}\right), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Ta tính

$$r'(t) = \left(2\sqrt{2}, -2e^{-2t}, 2e^{2t}\right),$$

nên chiều dài đường đi là:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \|r'(t)\| \, dt &= \int_0^1 \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (-2e^{-2t})^2 + (2e^{2t})^2} \, dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{8 + 4e^{-4t} + 4e^{4t}} \, dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{4(e^{-2t} + e^{2t})^2} \, dt \\ &= 2 \int_0^1 (e^{-2t} + e^{2t}) \, dt = 2 \cdot \frac{e^2 - e^{-2}}{2} = 2 \sinh(2) \approx 7,25. \quad \square \end{aligned}$$

Ví dụ

Tính chu vi đường tròn đơn vị được tham số hóa bởi

$$r(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Nếu ta tham số hóa $r(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ với $0 \leq t \leq 2\pi$ thì sự tính toán thay đổi thế nào?

Khi $r(t) = (\cos t, \sin t)$ thì $r'(t) = (-\sin t, \cos t)$ và chu vi đường tròn cần tìm là:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \|r'(t)\| \, dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 \, dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Khi $r(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ thì $r'(t) = (-2 \sin 2t, 2 \cos 2t)$ và

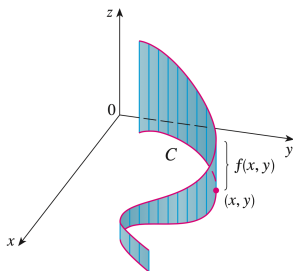
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \|r'(t)\| dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-2 \sin 2t)^2 + (2 \cos 2t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2 dt \\ &= 4\pi.\end{aligned}$$

Ở đây, ta tính được 2 lần chu vi của đường tròn vì khi t tăng từ 0 đến 2π thì điểm $r(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ đi được 2 lần đường tròn.

Do đó, khi tìm *chiều dài của đường cong* từ phương trình tham số $r(t)$, ta cần chắc chắn rằng vết của r chỉ đi qua đường cong đúng 1 lần từ $t = a$ đến $t = b$.

“chiều dài đường cong” $\neq$ “chiều dài đường đi”.

Tích phân đường loại 1 (tích phân đường của trường vô hướng)



Cho đường đi $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Giả sử f là hàm thực xác định trên vết của đường, tức là $f : r([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$. Ta muốn tính **tổng giá trị của hàm f trên đường r** .

Ý tưởng: ta chia nhỏ đường đi r thành những khoảng con $[t_{i-1}, t_i]$ và xem như f là hằng số trên khoảng này với giá trị $f(r(t_{i-1}))$.

Khi đó, tổng giá trị của f được xấp xỉ bởi

$$\sum_{i=1}^m f(r(t_{i-1})) \|r'(t_{i-1})\| \Delta t_i,$$

chính là tổng Riemann của hàm $f(r(t)) \|r'(t)\|$.

Định nghĩa

Cho f là một hàm xác định trên vết của đường $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. **Tích phân của f trên r** được ký hiệu là $\int_r f \, ds$ và được định nghĩa là

$$\int_r f \, ds = \int_a^b f(r(t)) \|r'(t)\| \, dt.$$

Như vậy, khi $f \equiv 1$, ta có chiều dài đường đi $r([a, b])$:

$$\int_r 1 \, ds = \int_a^b \|r'(t)\| \, dt.$$

Trong trường hợp hai chiều, nếu $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ với $r(t) = (x(t), y(t))$ thì

$$\int_r f \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt,$$

hay có thể nhớ một cách hình thức rằng

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt.$$

Ghi chú

Để có tích phân thì đường đi phải khả vi. Nếu đường đi chỉ **khả vi từng khúc** (piecewise-smooth curve), tức là có các số

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b$$

sao cho trên mỗi khoảng $[t_{i-1}, t_i]$ ánh xạ r là khả vi, thì gọi r_i là hạn chế (hay thu hẹp) của đường r lên khoảng $[t_{i-1}, t_i]$.

Khi đó, ta định nghĩa

$$\int_r f \, ds = \sum_{i=1}^m \int_{r_i} f \, ds.$$

Ví dụ

Cho đường đi được tham số hóa bởi $r(x) = (x, x^2)$, $0 \leq x \leq 1$. Giả sử tại mọi điểm trên vết của r có một hàm giá trị thực $f(x, y) = xy$. Tính $\int_r f \, ds$.

Ta thấy đường đi r có vết là đường parabola có phương trình $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$. Áp dụng công thức tích phân đường, ta tính:

$$\begin{aligned} I &= \int_r f \, ds = \int_0^1 f(r(x)) \|r'(x)\| \, dx \\ &= \int_0^1 f(x, x^2) \|r'(x)\| \, dx \\ &= \int_0^1 x \cdot x^2 \|(1, 2x)\| \, dx \\ &= \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 4x^2} \, dx. \end{aligned}$$

Đặt $u = 1 + 4x^2$, nên $du = 8x \, dx$. Tích phân trở thành:

$$I = \int_1^5 u^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} (u - 1) \frac{1}{8} \, du = \frac{5\sqrt{5}}{24} + \frac{1}{120}.$$



Tích phân đường loại 2 (tích phân đường của trường vectơ)

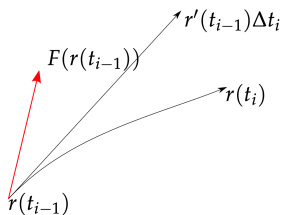
Cho đường đi $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Giả sử F là một trường vectơ xác định trên vết của r , tức là một ánh xạ $F : r([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tương ứng mỗi điểm trên ảnh của r với một vectơ trong $\mathbb{R}^n$. Ta muốn tính **tổng thành phần của trường cùng chiều hướng đi**.

Ví dụ: Trong vật lý, nếu một vật di chuyển theo một đường dưới tác động của một trường lực thì tổng tác động của lực, tức tổng thành phần của lực cùng chiều chuyển động, được gọi là **công** (work) của trường lực, đo tác động của trường lực lên chuyển động.

Nếu lực $\vec{F}$ là hằng vectơ và vật chuyển động trên đường theo hướng vectơ $\vec{s}$ thì công của lực là $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \|\vec{F}\| \|\vec{s}\| \cos(\vec{F}, \vec{s})$.

(Xem về chiếu vuông góc trong giáo trình).

Ý tưởng: Khi lực $\vec{F}$ không phải là hằng số, ta chia nhỏ miền xác định và xấp xỉ trên mỗi khoảng chia bằng hàm hằng.



Ta xét một phép chia $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ của $[a, b]$. Trên mỗi khoảng con $[t_{i-1}, t_i]$, $1 \leq i \leq m$, ta xem trường F như được xấp xỉ bằng trường hằng, $F(r(t_{i-1}))$, nên tổng thành phần cùng chiều đường đi của trường F trên phần đường từ $r(t_{i-1})$ đến $r(t_i)$ được xấp xỉ bằng

$$F(r(t_{i-1})) \cdot r'(t_{i-1})\Delta t_i.$$

Do đó, tổng thành phần tiếp tuyến của F dọc theo r được xấp xỉ bằng:

$$\sum_{i=1}^m F(r(t_{i-1})) \cdot r'(t_{i-1})\Delta t_i,$$

chính là tổng Riemann của hàm $F(r(t)) \cdot r'(t)$.

Định nghĩa

Cho F là một trường vectơ trên vết của một đường đi $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Tích phân của F trên r được ký hiệu là $\int_r F \cdot d\vec{s}$ và được định nghĩa là

$$\int_r F \cdot d\vec{s} = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt.$$

Định nghĩa này được mở rộng cho đường khả vi từng khúc theo cách như tích phân đường loại một. Một số cách khác ký hiệu cho tích phân đường loại 2 là: $\int_r F \cdot d\vec{r}$, $\int_r F \cdot d\vec{\ell}$.

Một cách cụ thể, nếu $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bởi $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, và $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ bởi $r(t) = (x(t), y(t))$, thì

$$\int_r F \cdot d\vec{s} = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt.$$

Nếu ta dùng ký hiệu:

$$\int_r P(x, y) dx = \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t) dt$$

và

$$\int_r Q(x, y) dy = \int_a^b Q(x(t), y(t))y'(t) dt$$

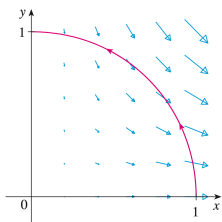
thì ta có thể viết:

$$\int_r F \cdot d\vec{s} = \int_r P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Một cách hình thức, ta có thể nhớ rằng: $d\vec{s} = r'(t) dt$, $dx = x'(t) dt$, và $dy = y'(t) dt$.

Ví dụ

Tìm công của lực bởi trường lực $F(x, y) = x^2\vec{i} - xy\vec{j}$ để di chuyển một vật dọc theo một phần tư đường tròn $r(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$ với $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.



Vì $x = \cos t$ và $y = \sin t$ nên ta tính:

$$F(r(t)) = (\cos^2 t, -\cos t \sin t),$$

$$r'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Bởi vậy, công của lực là:

$$\begin{aligned} W &= \int_r F \cdot d\vec{s} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t \cdot (-\sin t) + (-\cos t \sin t) \cdot \cos t) dt \\ &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t dt \\ &= 2 \frac{\cos^3 t}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$



Ví dụ

Tính tích phân

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

với $\vec{F}(x, y, z) = (\sin z, z, -xy)$ và C là đường cong được tham số hóa $(\cos \theta, \sin \theta, \theta)$ với $0 \leq \theta \leq \frac{5\pi}{2}$.

Vì $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ và $z = \theta$, nên ta tính

$$\begin{aligned} F(r(\theta)) &= (\sin \theta, \theta, -\cos \theta \sin \theta), \\ r'(\theta) &= (-\sin \theta, \cos \theta, 1). \end{aligned}$$

Tích phân trở thành

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{\frac{5\pi}{2}} (\sin \theta, \theta, -\cos \theta \sin \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta, 1) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{5\pi}{2}} \left(-\sin^2 \theta + \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta \right) d\theta = \frac{5\pi - 6}{4}. \quad \square \end{aligned}$$

Đổi biến và sự phụ thuộc vào đường đi

Cho $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ là một phép vi đồng phôi (phép đổi biến). Nhắc lại:

- ▶ Nếu $\varphi'(t) > 0$ với mọi $t \in [c, d]$ thì ta nói φ *bảo toàn định hướng* (orientation-preserving); và
- ▶ nếu $\varphi'(t) < 0$ với mọi $t \in [c, d]$ thì ta nói φ *đảo ngược định hướng* (orientation-reversing).

Nếu $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ là một đường đi thì $r \circ \varphi$ là một đường đi cùng vết với r . Ta nói $r \circ \varphi$ và r sai khác một phép đổi biến.

Định lý Đổi biến trong tích phân đường

Với hàm thực và trường vectơ liên tục trên vết của đường trơn thì:

- (a) Tích phân đường loại một không thay đổi qua phép đổi biến.*
- (b) Tích phân đường loại hai không thay đổi qua phép đổi biến bảo toàn định hướng và đổi dấu qua phép đổi biến đảo ngược định hướng.*

Chứng minh: Cho f là một hàm thực và F là một trường vectơ xác định trên vết của đường $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Cho $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ là một phép đổi biến.

Theo công thức đổi biến của tích phân bội, dùng đạo hàm của hàm hợp, với phép đổi biến $u = \varphi(t)$ thì

$$\begin{aligned}\int_r f \, ds &= \int_a^b f(r(u)) \|r'(u)\| \, du \\&= \int_c^d f(r(\varphi(t))) \|r'(\varphi(t))\| \|\varphi'(t)\| \, dt \\&= \int_c^d f(r(\varphi(t))) \|r'(\varphi(t))\varphi'(t)\| \, dt \\&= \int_c^d f(r \circ \varphi(t)) |(r \circ \varphi)'(t)| \, dt \\&= \int_{r \circ \varphi} f \, ds.\end{aligned}$$

Như vậy, tích phân đường loại 1 không thay đổi qua phép đổi biến.

Giả sử phép đổi biến φ đảo ngược định hướng. Với tích phân đường loại 2, ta tính:

$$\begin{aligned}\int_r F \cdot d\vec{s} &= \int_a^b F(r(u)) \cdot r'(u) du \\ &= \int_c^d [F(r(\varphi(t))) \cdot r'(\varphi(t))] \|\varphi'(t)\| dt \\ &= - \int_c^d [F(r(\varphi(t))) \cdot r'(\varphi(t))] \varphi'(t) dt \\ &= - \int_c^d F(r \circ \varphi(t)) \cdot (r \circ \varphi)'(t) dt \\ &= - \int_{r \circ \varphi} F \cdot d\vec{s}.\end{aligned}$$

Như vậy, tích phân đường loại 2 đổi dấu qua phép đổi biến đảo ngược định hướng. Trường hợp φ bảo toàn định hướng là tương tự, nhưng tích phân không bị đổi dấu. □

Ví dụ

Trở lại ví dụ trước: *Tìm công của lực bởi trường lực $F(x, y) = x^2\vec{i} - xy\vec{j}$ để di chuyển một vật dọc theo một phần tư đường tròn*

$$r(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}, \quad \text{với } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Vì $x = \cos(t)$ và $y = \sin(t)$, nên

$$\begin{aligned} F(r(t)) &= \left(\cos^2(t), -\sin(t)\cos(t) \right), \\ r'(t) &= (-\sin(t), \cos(t)). \end{aligned}$$

Ta có phép đổi biến:

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2} - t.$$

Ta thấy phép đổi biến có $\varphi'(t) < 0$ nên là đảo ngược định hướng. Ta cũng thấy rằng $r(t)$ dưới phép đổi biến trở thành

$$r(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = (\sin t, \cos t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ta tính công của lực:

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \cos(t) dt \\ &= \frac{2}{3} \sin^3(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Kết quả này trái dấu với kết quả trong ví dụ trước.



Đường ngược

Với đường đi $r(t)$, $t \in [a, b]$ thì đường $r(a + b - t)$, $t \in [a, b]$ khởi đầu ở $r(b)$ và kết thúc ở $r(a)$, được gọi là **đường ngược** của đường r , ký hiệu là $-r$. Ta nói đường $-r$ trái chiều với đường r .

Theo Định lý đổi biến trong tích phân đường, ta có:

$$\int_{-r} f \, ds = \int_r f \, ds \quad \text{và} \quad \int_{-r} F \cdot d\vec{s} = - \int_r F \cdot d\vec{s}.$$

$$(Ta \text{ có } \varphi(t) = a + b - t \text{ với } \varphi'(t) = -1 < 0)$$

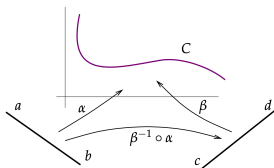
Trên đường ngược này thì tích phân đường loại một không đổi, nhưng tích phân đường loại hai đổi dấu.

Đường chính quy

Đường đi $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ được gọi là **chính quy** (regular) nếu r trơn trên $[a, b]$ và vận tốc $r'(t)$ luôn khác không.

Bổ đề

Giả sử $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ và $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ là hai đường đi đơn chính quy cùng vết.



- (a) Nếu α và β không là đường đi kín, thì $\beta^{-1} \circ \alpha : (a, b) \rightarrow (c, d)$ là một phép đổi biến.
- (b) Nếu α và β là đường đi kín, đặt $\beta(t_1) = \alpha(a)$ và $\alpha(s_1) = \beta(c)$, thì $\beta^{-1} \circ \alpha : (a, b) \setminus \{s_1\} \rightarrow (c, d) \setminus \{t_1\}$ là một phép đổi biến.

(vi đồng phôi = song ánh, khả vi liên tục, ánh xạ ngược cũng khả vi liên tục).

Với cách viết $\alpha = \beta \circ (\beta^{-1} \circ \alpha)$, bổ đề nói rằng hai đường α và β khác biệt bởi phép đổi biến $\varphi = \beta^{-1} \circ \alpha$.

Ta nói hai đường đi đơn chính qui có cùng vết α và β là **có cùng định hướng** nếu phép vi đồng phôi $\beta^{-1} \circ \alpha$ bảo toàn định hướng.

Ngược lại ta nói α và β là **trái định hướng**, nếu $\beta^{-1} \circ \alpha$ đảo ngược định hướng.

Do đạo hàm hàm hợp nên $\alpha'(t) = \beta'(\varphi(t))\varphi'(t)$ cho thấy α và β là cùng định hướng khi và chỉ khi vectơ vận tốc $\alpha'(t)$ và $\beta'(\varphi(t))$ luôn cùng phương cùng chiều; ngược lại α và β là trái định hướng khi và chỉ khi vectơ vận tốc $\alpha'(t)$ và $\beta'(\varphi(t))$ luôn cùng phương trái chiều.

Tóm lại, hai đường đi cùng vết là cùng định hướng khi vận tốc luôn cùng chiều, trái định hướng khi vận tốc luôn trái chiều.

Đường cong và định hướng

Ta có thể nói đến tích phân đường loại một (chẳng hạn chiều dài) trên một **tập hợp điểm**, ví dụ như một đường tròn, một đồ thị, ... nếu tập điểm ấy là vết của một đường đi đơn chính qui nào đó.

Trong trường hợp này ta nói vết đó là một **đường cong** (curve). Đường cong có thể được cho thêm một **định hướng**, gồm những đường đi cùng định hướng trên đường cong.

Trong môn học này ta thường hình dung một cách trực quan định hướng trên một đường như là một “chiều” trên đường đó.

Trên hình vẽ trực quan ta thường chỉ định hướng bằng một mũi tên trên đường. Mũi tên đó chỉ chiều của vectơ vận tốc của một chuyển động trên đường.

Tích phân trên đường cong

Định lý

Với hàm thực và trường vectơ xác định và liên tục trên vết của hai đường đơn chính quy có cùng vết thì:

- (a) Tích phân đường loại một bằng nhau.*
- (b) Tích phân đường loại hai bằng nhau nếu hai đường có cùng định hướng và đối nhau nếu hai đường trái định hướng.*

Ví dụ

Giả sử đồ thị hàm số $y = x^2$ nằm giữa hai điểm $(1, 1)$ và $(3, 9)$ có đường đi được miêu tả bởi phương trình tham số như sau:

$$\alpha(u) = (u, u^2), \quad 1 \leq u \leq 3 \quad \text{và} \quad \beta(v) = (\sqrt{v}, v), \quad 1 \leq v \leq 9.$$

Ta thấy α và β đều trơn và $\alpha'(u) \neq 0$ với mọi $1 \leq u \leq 3$ cùng với $\beta'(v) \neq 0$ với mọi $1 \leq v \leq 9$. Do đó, α và β là đường đi chính quy.

Ta thấy:

$$(\beta^{-1} \circ \alpha)(u) = \beta^{-1}(\alpha(u)) = \beta^{-1}(u, u^2) = u^2, \quad 1 \leq u \leq 3,$$

nên $(\beta^{-1} \circ \alpha)'(u) = 2u > 0$. Do đó, phép vi đồng phôi $\beta^{-1} \circ \alpha$ *bảo toàn định hướng*, nên hai đường đi α và β *có cùng định hướng*. Như vậy, ta có

$$\int_{\alpha} f \, ds = \int_{\beta} f \, ds \quad \text{và} \quad \int_{\alpha} F \cdot d\vec{s} = \int_{\beta} F \cdot d\vec{s}$$

với mọi hàm f và F xác định trên vết của α (hoặc β).

Bây giờ, đường đi như trên được miêu tả bởi phương trình tham số sau:

$$\alpha(u) = (u, u^2), \quad 1 \leq u \leq 3 \quad \text{và} \quad \gamma(w) = (\sqrt{10-w}, 10-w), \quad 1 \leq w \leq 9.$$

Ta thấy α và γ đều trơn và $\alpha'(u) \neq 0$ với mọi $1 \leq u \leq 3$ cùng với $\gamma'(w) \neq 0$ với mọi $1 \leq w \leq 9$. Do đó, α và γ là đường đi chính quy.

Ta thấy:

$$(\gamma^{-1} \circ \alpha)(u) = \gamma^{-1}(\alpha(u)) = \gamma^{-1}(u, u^2) = 10 - u^2, \quad 1 \leq u \leq 3,$$

nên $(\gamma^{-1} \circ \alpha)'(u) = -2u < 0$. Do đó, phép vi đồng phôi $\gamma^{-1} \circ \alpha$ đảo ngược định hướng, nên hai đường đi α và γ trái định hướng. Như vậy, ta có

$$\int_{\alpha} f \, ds = \int_{\gamma} f \, ds \quad \text{và} \quad \int_{\alpha} F \cdot d\vec{s} = - \int_{\gamma} F \cdot d\vec{s}$$

với mọi hàm f và F xác định trên vết của α (hoặc γ).

Các bước tính tích phân trên đường cong

1. Chọn một đường đi, tức là một **tham số hóa** đường đơn, chính quy *bất kỳ* trên đường cong.
2. **Xác định** đây là tích phân đường *loại một* hay *loại hai*.
3. **Thay tham số hóa vào công thức** trong định nghĩa của đúng loại tích phân để tính.
4. Nếu là tích phân đường *loại hai* thì đường cong được **cho thêm một định hướng**, thường ở dạng trực quan. Xác định tham số hóa đã chọn ở Bước 1 là cùng định hướng hay trái định hướng đã cho, bằng trực quan hay tính toán điểm đầu và điểm cuối của đường đi.

Nếu là trái định hướng thì lấy giá trị đối của tích phân đã thu được ở Bước 3.

Ví dụ: tích phân đường loại 1

Tính tích phân $\int_C x \, ds$, trong đó C là đường cong $x = y^3$ từ điểm $(-1, -1)$ đến điểm $(1, 1)$.

Phương trình tham số của $x = y^3$ là

$$r(y) = (y^3, y), \quad -1 \leq y \leq 1.$$

Vì $r'(y) = (3y^2, 1)$, nên ta có:

$$\int_C x \, ds = \int_{-1}^1 y^3 \sqrt{9y^4 + 1} \, dy = 0$$

vì hàm bên trong tích phân là hàm lẻ và tích phân trên một miền đối xứng. □

Ví dụ: tích phân đường loại 2, tham số cùng định hướng

Cho trường $\vec{F}(x, y) = (2y, -3x)$ và C là đường cong $y = x^2$ với $0 \leq x \leq 1$, định hướng từ $(0, 0)$ đến $(1, 1)$. Tính $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$.

Trước hết, ta sẽ tham số hóa đường cong C bởi:

$$C(x) = (x, x^2), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Như vậy, tích phân sẽ là:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 \vec{F}(C(x)) \cdot C'(x) dx \\ &= \int_0^1 (2x^2, -3x) \cdot (1, 2x) dx \\ &= \int_0^1 (2x^2 - 6x) dx \\ &= -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$



Trong ví dụ trên, ta có thể chọn các phương trình tham số khác miễn là chúng có cùng vết với đường $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$. Một cách cụ thể, ta xét:

$$C_2(y) = (\sqrt{y}, y), \quad 0 \leq y \leq 1,$$

$$C_3(t) = (\ln(t), \ln^2(t)), \quad 1 \leq t \leq e,$$

thì tích phân trở thành:

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 \int_0^1 \vec{F}(C_2(y)) \cdot C_2'(y) dy \\ &= \int_0^1 (2y, -3\sqrt{y}) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{y}}, 1 \right) dy \\ &= -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Tương tự, ta tính:

$$\begin{aligned}\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_1^e \vec{F}(C_3(t)) \cdot C'_3(t) dt \\ &= \int_1^e (2\ln^2(t), -3\ln(t)) \cdot \left(\frac{1}{t}, \frac{2\ln(t)}{t}\right) dt \\ &= -4 \int_1^e \frac{\ln^2(t)}{t} dt = -\frac{4}{3} \ln^3 t \Big|_1^e = -\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Các kết quả này đều bằng với kết quả trong cách trước.

Ví dụ: tích phân đường loại 2, tham số trái định hướng

Tính công của một trường lực $\vec{F}(x, y) = x^2\vec{i} + ye^x\vec{j}$ tác động lên một chất điểm di chuyển theo đường parabola $x = y^2 + 1$ từ $(2, 1)$ đến $(1, 0)$.

Phương trình tham số của $x = y^2 + 1$ là

$$r(y) = (y^2 + 1, y), \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Vì $r(0) = (1, 0)$ và $r(1) = (2, 1)$, nên r trái định hướng của đề bài cho. Vì vậy, công của lực cần tính là:

$$\begin{aligned} W &= - \int_r \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_0^1 F(r(y)) \cdot r'(y) dy \\ &= - \int_0^1 \left((y^2 + 1)^2, ye^{y^2+1} \right) \cdot (2y, 1) dy \\ &= - \int_0^1 \left[2y(y^2 + 1)^2 + ye^{y^2+1} \right] dy \\ &= -\frac{7}{3} - \frac{e^2 - e}{2}. \end{aligned}$$

Ví dụ

Cho hàm thực $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, và γ là một đường chính quy bất kỳ đi từ a đến b . Tính tích phân $\int_{\gamma} f \, ds$.

Khoảng $[a, b]$ cũng là vết của đường đơn, chính quy $\alpha(t) = t$ với $t \in [a, b]$, nên

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_{\alpha} f \, ds = \int_a^b f(\alpha(t)) |\alpha'(t)| \, dt = \int_a^b f(t) \, dt,$$

chính là tích phân của hàm f trên khoảng $[a, b]$. □

Vậy tích phân của hàm thực trên khoảng là một trường hợp riêng của tích phân đường loại một. □

Ví dụ: chiều dài của đoạn thẳng

Tìm chiều dài của đoạn thẳng nối hai điểm A và B trong $\mathbb{R}^n$.

Xét đường đi $r(t) = (1 - t)A + tB$ với $0 \leq t \leq 1$, một đường đi đều từ A đến B .

Chiều dài của đường đi này là

$$\int_0^1 \|r'(t)\| \, dt = \int_0^1 \|B - A\| \, dt = \|B - A\|.$$



Nếu ta tham số hóa đoạn thẳng nối hai điểm A và B bởi

$$\alpha(t) = A + \frac{1}{3}(t^2 + 2t)(B - A), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

thì vận tốc trên đường này là $\alpha'(t) = \frac{1}{3}(2t + 2)(B - A)$.

Chiều dài của đường đi này là

$$\begin{aligned} \int_0^1 \|\alpha'(t)\| \, dt &= \int_0^1 \left\| \frac{1}{3}(2t + 2)(B - A) \right\| \, dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{3}(2t + 2)\|B - A\| \, dt \\ &= \|B - A\|. \end{aligned}$$

Ví dụ: chu vi của đường tròn

Ta đã biết nếu đường đi được tham số hóa bởi

$$r(t) = (R \cos t, R \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

một đường đi với tốc độ hằng quanh đường tròn tâm O bán kính R , thì chiều dài của đường đi này là

$$\int_0^{2\pi} \|r'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

Nếu ta lấy một đường đi khác

$$\alpha(t) = (R \cos(2\pi t), R \sin(2\pi t)), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

thì chiều dài của đường đi này là

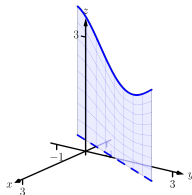
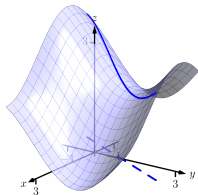
$$\int_0^1 \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^1 2\pi R dt = 2\pi R.$$



Ta có thể nói chiều dài của đường tròn bằng $2\pi R$, không phụ thuộc vào cách chọn một tham số hóa đơn chính quy để tính.

Ví dụ

Tính diện tích của mặt vuông góc với mặt phẳng Oxy dọc theo đoạn thẳng $y = 2x + 1$, $-1 \leq x \leq 1$ và bên dưới đồ thị của hàm số $f(x, y) = \cos(x) + \sin(y) + 2$.



Mặt cần tính diện tích nằm bên dưới đồ thị $f(x, y)$ và phía trên đường $(r) : y = 2x + 1$. Vì vậy, diện tích cần tính được cho bởi $\int_r f \, ds$.

Đường $y = 2x + 1$ được tham số hóa bởi $\vec{r}(x) = (x, 2x + 1)$, $-1 \leq x \leq 1$.
Vì $\vec{r}'(x) = (1, 2)$, nên diện tích cần tính được cho bởi tích phân:

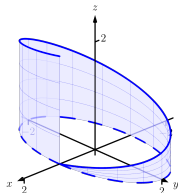
$$\begin{aligned}\int_r f \, ds &= \int_{-1}^1 f(x, 2x + 1) \|\vec{r}'(x)\| \, dx \\&= \int_{-1}^1 (\cos(x) + \sin(2x + 1) + 2) \sqrt{1 + 4} \, dx \\&= 2\sqrt{5} \sin(1) + \sqrt{5} \sin(1) \sin(2) + 4\sqrt{5}.\end{aligned}$$



Ghi chú: Một cách hiểu khác: diện tích cần tính là chiều dài cạnh đáy nhân với chiều cao. Cạnh đáy là một phần của đường $y = 2x + 1$, trong khi chiều cao được cho bởi hàm $f(x, y)$.

Ví dụ

Tính diện tích của mặt nằm phía trên, vuông góc với mặt phẳng Oxy , và nằm bên dưới đường cong $\vec{r}(t) = (\cos(t), 2\sin(t), \frac{t}{\pi})$, $0 \leq t \leq 2\pi$.



Diện tích của mặt cần tìm được cho bởi chiều dài cạnh đáy nhân với chiều cao. Ở đây, cạnh đáy nằm trong mặt phẳng Oxy được cho bởi $\vec{C}(t) = (\cos(t), 2\sin(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$; trong khi chiều cao là $f(x, y, z) = z$. Diện tích cần tính là:

$$\int_0^{2\pi} \frac{t}{\pi} \|\vec{C}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \frac{t}{\pi} \sqrt{\cos^2(t) + 4\sin^2(t)} dt \approx 9,688.$$



Liên hệ giữa hai loại tích phân đường

Gọi C là đường cong định hướng, tức là là vết của một đường đi đơn, chính quy $r(t)$ theo hướng đã cho, $a \leq t \leq b$. **Hướng của tiếp tuyến** của C tại điểm $p = r(t_p)$ với $a \leq t_p \leq b$ là hướng của vectơ vận tốc $r'(t_p)$.

Hướng tiếp tuyến tại một điểm trên đường cong được định hướng không phụ thuộc vào cách chọn đường đi đơn chính qui trên đó. Vì vậy *việc định hướng cho đường cong đồng nghĩa với việc chọn hướng tiếp tuyến*.

Tại điểm $p = r(t_p)$, **vectơ tiếp tuyến cùng chiều đơn vị** được định nghĩa là

$$T(p) = T(r(t_p)) = \frac{r'(t_p)}{\|r'(t_p)\|}.$$

Vectơ này không phụ thuộc vào cách chọn đường đi r theo định hướng của C .

Nếu F là một trường vectơ trên C thì

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot d\vec{s} &= \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt \\ &= \int_a^b \left[F(r(t)) \cdot \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} \right] \|r'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \left[F(r(t)) \cdot T(r(t)) \right] \|r'(t)\| dt \\ &= \int_C F \cdot T ds.\end{aligned}$$

Ta thấy tích phân đường loại hai có thể được biểu diễn qua tích phân đường loại một.

Biểu thức trên cũng khẳng định lại ý nghĩa của tích phân loại hai, đó là tổng thành phần tiếp tuyến của trường dọc theo đường.

Chương: Công thức Newton–Leibniz

Công thức Newton–Leibniz

Tương tự như công thức tính tích phân hàm một biến, ta có:

Định lý

Giả sử r là một đường đi trơn từng khúc, bắt đầu ở A và kết thúc ở B . Cho f là một hàm thực trơn trên tập mở chứa vết của r . Khi đó,

$$\int_r \nabla f \cdot d\vec{s} = f(B) - f(A).$$

Ghi chú

Công thức trên cho mỗi liên hệ giữa tích phân của đạo hàm với giá trị của nguyên hàm trên biên, có dạng

$$\int_A^B f' = f(B) - f(A).$$

Cho nên, ta xem đây là tổng quát hóa của công thức Newton–Leibniz cho hàm một biến, và công thức này còn được gọi là *Định lý cơ bản của tích phân đường*.

Công thức trên có một hệ quả là tích phân $\int_r \nabla f \cdot d\vec{s}$ không phụ thuộc vào sự lựa chọn đường đi r từ điểm A đến điểm B . Ta nói tích phân này là **độc lập với đường đi**.

Chứng minh

Giả sử $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ trơn với $r(a) = A$ và $r(b) = B$. Khi đó, theo công thức Newton–Leibniz của hàm một biến, ta có:

$$\begin{aligned}\int_r \nabla f \cdot d\vec{s} &= \int_a^b \nabla f(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(f \circ r)(t) dt \\ &= (f \circ r)(b) - (f \circ r)(a) = f(B) - f(A).\end{aligned}$$

Nếu r chỉ trơn từng khúc, nghĩa là $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b$ để $r|_{[t_{i-1}, t_i]}$ trơn với mọi $1 \leq i \leq m$, thì

$$\begin{aligned}\int_r \nabla f \cdot d\vec{s} &= \sum_{i=1}^m \int_{r|_{[t_{i-1}, t_i]}} \nabla f \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^m [f(r(t_i)) - f(r(t_{i-1}))] \\ &= f(r(t_m)) - f(r(t_0)) = f(B) - f(A).\end{aligned}$$



Ví dụ

Tính tích phân $\int_C \nabla f \cdot d\vec{s}$ với $f(x, y) = xy + 3y^2$ và C là một đường đi trơn bất kỳ từ $(1, 0)$ đến $(2, 1)$.

Áp dụng công thức Newton–Leibniz, ta tính được

$$\begin{aligned}\int_C \nabla f \cdot d\vec{s} &= f(x, y) \Big|_{(1,0)}^{(2,1)} \\ &= f(2, 1) - f(1, 0) \\ &= 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 0 \\ &= 5.\end{aligned}$$

